УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 4 Физико-математические науки *2010*

УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СОСТОЯНИЕ

А.В. Лапин, М.Г. Хасанов

Аннотация

Рассматривается сеточная аппроксимация задачи оптимального управления правой частью линейного эллиптического уравнения при наличии ограничений как на функцию управления, так и на функцию состояния системы. Теоретически и численно изучается сходимость итерационных методов решения полученной конечномерной задачи. Проводится сравнение числовых результатов, полученных разными методами.

Ключевые слова: оптимальное управление, седловая задача с ограничениями, метод конечных элементов, итерационные методы.

Введение

Аппроксимация задач оптимального управления в правой части линейного эллиптического уравнения или граничного условия Неймана приводит к конечномерной седловой задаче с ограничениями. При наличии простых ограничений лишь на вектор управления эта седловая задача сводится к вариационному неравенству относительно вектора управления и эффективно решается предобусловленным методом простой итерации. По существу это градиентный метод с проекцией для минимизации квадратичной целевой функции с простыми ограничениями. При наличии ограничений на вектор состояния этот градиентный метод непосредственно применить нельзя. Ограничения на состояние можно внести в целевую функцию со штрафным параметром (иначе говоря, регуляризовать индикаторную функцию множества ограничений) и затем применить какой-либо метод минимизации (см. [1–3]). Другой подход состоит в применении методов двойственности для отыскания вектора множителей Лагранжа. При этом наличие простых ограничений как на вектор управления, так и на вектор состояния не ограничивает возможности применения методов двойственности. Такой подход был осуществлен в работе [4], в которой использован метод расширенного лагранжиана. Ряд других методов для решения задач с ограничениями на состояние системы рассмотрен в [5, 6].

В настоящей работе проведено теоретическое и численное исследование двойственного метода и прямого метода с регуляризацией целевой функции для одной модельной сеточной задачи – задачи управления в правой части уравнения с простыми ограничениями на векторы управления и состояния. Существенно использован тот факт, что наблюдение в задаче оптимального управления осуществляется во всей области, что позволяет не модифицировать соответствующую функцию Лагранжа. Доказана сходимость методов и получены оценки их скорости сходимости в случае регуляризованной целевой функции. Приведены результаты численных экспериментов.

1. Постановка и аппроксимация задачи оптимального управления

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $V = H_0^1(\Omega)$ – пространство Соболева со скалярным произведением $(y,z) = \int\limits_\Omega \nabla y \cdot \nabla z \, dx$ и нормой $\|y\| = (y,y)^{1/2}$. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$y \in V : \int\limits_\Omega \nabla y \cdot \nabla z \, dx = \int\limits_\Omega (f+u) z \, dx \quad \forall z \in V, \tag{1}$$

где $f \in L_2(\Omega)$ – фиксированная функция и $u \in L_2(\Omega)$ – функция управления. Задача (1) однозначно разрешима при любой правой части $f+u \in L_2(\Omega)$ и справедливо неравенство устойчивости

$$\|y\|_V \leq k\|f+u\|_{L_2(\Omega)}, \quad k = \text{const}. \tag{2}$$

Зададим множества ограничений

$$U_{ad} = \{u \in L_2(\Omega) : |u(x)| \leq u_d \; \forall x \in \Omega\}, \quad Y_{ad} = \{y \in V : y(x) \geq 0 \; \forall x \in \Omega\},$$

$u_d = \text{const} > 0$, и целевой функционал

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (y - y_d)^2 \, dx + \frac{r}{2}\int\limits_\Omega u^2 \, dx, \quad r = \text{const} > 0,$$

$y_d \in L_2(\Omega)$ – заданная функция. В дальнейшем считаем, что множество

$$K = \{(y,u) : y \in Y_{ad}, u \in U_{ad} \text{ и выполнено (1)}\}$$

не пусто. В случае, когда $f(x)$ – непрерывная в $\bar{\Omega}$ функция, для этого достаточно выполнения неравенства $u_d \geq \max\limits_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$, так как найдется функция $u \in U_{ad}$ такая, что $f(x) + u(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$, откуда следует неотрицательность решения y уравнения (1).

Лемма 1. *Задача оптимального управления*

$$\textit{найти} \min_{(y,u) \in K} J(y,u) \tag{3}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Множества U_{ad} и Y_{ad} выпуклы и замкнуты, при этом U_{ad} ограничено. Отсюда, а также из линейности уравнения состояния (1) и неравенства устойчивости (2) следует выпуклость, замкнутость и ограниченность множества K. Функционал J – непрерывный и строго выпуклый в $V \times L_2(\Omega)$. Из приведенных свойств K и J следует существование единственного решения задачи (3). $\square$

Построим конечно-элементную аппроксимацию задачи (3), считая Ω многоугольной областью. Пусть $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{e \in T_h} e$ – конформная триангуляция $\overline{\Omega}$, T_h – семейство треугольных конечных элементов e с максимальным по всему семейству диаметром h. Пусть далее $V_h \subset V$ – пространство непрерывных и кусочно-линейных функций, обращающихся в нуль на границе. Будем считать для простоты, что функции f, u и y_d непрерывны в $\overline{\Omega}$, и обозначим через f_h, u_h и $y_{d\,h}$ их V_h-интерполянты. Для аппроксимации интегралов от непрерывных функций используем квадратурные формулы

$$\int_e g(x)\,dx \approx S_e(g) = \frac{\operatorname{mes} e}{3}\sum_{\alpha=1}^{3} g(x_\alpha), \quad x_\alpha \text{ – вершины } e, \quad S_\Omega(g) = \sum_{e\in T_h} S_e(g).$$

Теперь мы можем определить аппроксимации уравнения состояния, множеств ограничений и целевой функции:

$$y_h \in V_h : S_\Omega(\nabla y_h\cdot\nabla z_h) = S_\Omega((f_h+u_h)\,z_h) \quad \forall z_h \in V_h, \tag{4}$$

$$U_{ad}^h = \{u_h \in V_h : |u_h(x)| \le u_d \ \forall x \in \overline{\Omega}\}, \quad Y_{ad}^h = \{y_h \in V_h : y_h(x) \ge 0 \text{ для } x\in\Omega\},$$

$$J_h(y_h,u_h) = \frac{1}{2}\,S_\Omega((y_h - y_{d\,h})^2) + \frac{r}{2}\,S_\Omega(u_h^2).$$

В результате получим конечномерную задачу оптимального управления

$$\begin{gathered}\text{найти} \min_{(y_h,u_h)\in K_h} J_h(y_h,u_h),\\ K_h = \{(y_h,u_h) : y_h \in Y_{ad}^h, u_h \in U_{ad}^h, \ \text{выполнено уравнение (4)}\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Далее предполагаем, что множество K_h не пусто, более того, пусть

$$\exists u_h \in \operatorname{int}U_{ad}^h, \quad \exists y_h \in \operatorname{int}Y_{ad}^h : \ \text{выполнено уравнение (4)}. \tag{6}$$

Иными словами, пусть

$$\exists u_h : |u_h(x)| < u_d \ \forall x \quad \text{такой, что решение (4) } y_h(x) > 0. \tag{7}$$

Это справедливо, например, если триангуляция T_h удовлетворяет условию «острого угла» (углы треугольников не превосходят $\pi/2$) и $u_d > \max\limits_{x\in\Omega}|f(x)|$. При сформулированном требовании на триангуляцию решение y_h задачи (4) строго положительно при положительной правой части, а условие на u_d и f обеспечивает существование $u_h \in U_{ad}^h$ такого, что $(f_h+u_h)(x) > 0$ для всех $x\in\Omega$.

Лемма 2. *Задача* (5) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Билинейная форма $a_h(y_h,z_h)$, определенная левой частью уравнения (4), равномерно по h коэрцитивна и ограничена. Поэтому уравнение (4) имеет единственное решение и справедлива оценка устойчивости

$$S_\Omega^{1/2}(y_h^2) \le k_f S_\Omega^{1/2}((f_h+u_h)^2) \tag{8}$$

с константой k_f, не зависящей от h. Используя (8) и свойства множеств Y_{ad}^h, U_{ad}^h, нетрудно доказать, что множество K_h – выпуклое, замкнутое и ограниченное. Ясно, что функция J_h непрерывна и строго выпукла. Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (5). □

Пусть теперь $y \in \mathbb{R}^N$ – вектор узловых параметров функции $y_h \in V_h$ ($N = \operatorname{dim}V_h$), $y \Leftrightarrow y_h$. Определим матрицу жесткости $L \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и матрицу масс $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ равенствами

$$(Ly,z) = S_\Omega(\nabla y_h\cdot\nabla z_h), \quad (My,z) = S_\Omega(y_h z_h), \tag{9}$$

где $y \Leftrightarrow y_h \in V_h$, $z \Leftrightarrow z_h \in V_h$, а скобки $(\cdot,\cdot)$ в левой части равенств означают евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Отметим, что по построению матрицы L и M симметричны и положительно определены, при этом матрица масс M – диагональная. С использованием введенных обозначений дискретное уравнение состояния (4), множества ограничений U_{ad}^h, Y_{ad}^h и функция цели $J_h(y_h,u_h)$ могут быть записаны в терминах векторов узловых параметров сеточных функций:

$$Ly = M(f+u),$$

$$U_{ad} = \{u \in \mathbb{R}^N : |u_i| \le u_d,\, i=1,2,\dots,N\}, \quad Y_{ad} = \{y \in \mathbb{R}^N : y_i \ge 0\, i=1,2,\dots,N\},$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}(My,y) - (g,y) + \frac{r}{2}(Mu,u), \quad g = My_d.$$

Пусть $\varphi(u) = I_{U_{ad}}(u)$ и $\theta(y) = I_{Y_{ad}}(y)$ – индикаторные функции множеств U_{ad} и Y_{ad}. Тогда задача оптимального управления (5) преобразуется к виду

$$\min_{Ly=M(f+u)} \left\{ J(y,u) = \frac{1}{2}(My,y) - (g,y) + \theta(y) + \frac{r}{2}(Mu,u) + \varphi(u) \right\}. \tag{10}$$

Определим функцию Лагранжа для задачи (10) равенством

$$\mathcal{L}(y,u) = \frac{1}{2}(My,y) - (g,y) + \theta(y) + \frac{r}{2}(Mu,u) + \varphi(u) - (Ly - M(f+u),\lambda). \tag{11}$$

Седловая точка функции Лагранжа является решением (см., например, [7]) следующей системы (условия оптимальности первого порядка)

$$\begin{pmatrix} M & 0 & -L \\ 0 & rM & M \\ -L & M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\theta(y) \\ \partial\varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ -Mf \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Лемма 3. *Задача* (12) *имеет решение* (y,u,λ), *при этом пара* (y,u) *определяется однозначно и совпадает с решением задачи* (10).

Доказательство. Матрица $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & rM \end{pmatrix}$ положительно определена, в то время как матрица $C = \begin{pmatrix} -L & M \end{pmatrix}$ имеет полный ранг. Вместе с условием (6) это обеспечивает справедливость сформулированного результата (см., например, теорему 5.6 в [8, с. 84]). □

2. Итерационные методы решения конечномерной задачи оптимального управления

2.1. Градиентный метод отыскания вектора управления. Пусть индикаторная функция $\theta(y) = I_{Y_{ad}}(y)$ множества Y_{ad} аппроксимирована дифференцируемой функцией

$$\theta_\varepsilon(y) = \frac{1}{2\,\varepsilon}(My^-, y^-) \text{ с градиентом } \nabla\theta_\varepsilon(y) = -\frac{1}{\varepsilon}My^-, \tag{13}$$

где y^- – вектор с координатами y_i^-. Тогда можно исключить векторы y и λ из системы (12) и получить включение для вектора u:

$$\begin{gathered} P_\varepsilon u + \partial\varphi(u) \ni ML^{-1}g, \\ P_\varepsilon u = M\,L^{-1}\big(M + \nabla\theta_\varepsilon\big)(L^{-1}M(u+f)) + rMu. \end{gathered} \tag{14}$$

Применим для решения (14) одношаговый предобусловленный итерационный метод

$$M\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau}+P_\varepsilon u^k+\partial\varphi(u^{k+1})\ni ML^{-1}g. \tag{15}$$

Алгоритм его реализации состоит из следующих шагов.

1. Для известного вектора управления u^k найти решение уравнения состояния $Ly^k=M\,(u^k+f)$.

2. Найти сопряженное состояние λ^k: $\lambda^k=L^{-1}(My^k+\nabla\theta_\varepsilon(y^k)-g)$.

3. Найти новое приближение к вектору управления, решив включение с диагональным максимально монотонным оператором

$$Mu^{k+1}+\tau\partial\varphi(u^{k+1})\ni(1+\tau r)Mu^k-\tau M\lambda^k. \tag{16}$$

Теорема 1. *Задача* (14) *имеет единственное решение. Итерационный метод* (15) *сходится при*

$$0<\tau<\frac{2\varepsilon}{k_f^2(1+\varepsilon)+r\,\varepsilon},$$

где k_f *– постоянная из неравенства* (8). *При*

$$\tau=\tau_0=\frac{\varepsilon}{k_f^2(1+\varepsilon)+r\,\varepsilon}$$

скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|u^{k+1}-u\|_M\le\rho\|u^k-u\|_M,\quad \rho=1-\frac{r\,\varepsilon}{k_f^2(1+\varepsilon)+r\,\varepsilon}.$$

Доказательство. Положим $P_\varepsilon=P_1+P_{2\,\varepsilon}$, где

$$P_1=ML^{-1}\,M\,L^{-1}\,M+rM,\quad P_{2\,\varepsilon}=M\,L^{-1}\,\nabla\theta_\varepsilon\circ L^{-1}M.$$

Тогда

$$(P_1(u-v),u-v)=\left\|L^{-1}M(u-v)\right\|_M^2+r\,\|u-v\|_M^2\ge r\,\|u-v\|_M^2\,,$$

$$(P_1(u-v),w)\le(P_1(u-v),u-v)^{1/2}(P_1(w),w)^{1/2}\le$$
$$\le\left(k_f^2+r\right)^{1/2}(P_1(u-v),u-v)^{1/2}\;\|w\|_M\,.$$

Для вывода оценок для $P_{2\,\varepsilon}$ получим одно вспомогательное неравенство. Пусть $Ly=Mf$ и $y_h\in V_h$, $f_h\in V_h$ – соответствующие сеточные функции:

$$S_\Omega(\nabla y_h\cdot\nabla z_h)=S_\Omega(f_h\,z_h)\quad\forall z_h\in V_h.$$

Поскольку

$$(ML^{-1}\,M\,L^{-1}\,Mf,f)=(My,y)=S_\Omega(y_h^2),\;(Mf,f)=S_\Omega(f_h^2),$$

то в силу неравенства (8) справедлива оценка

$$(ML^{-1}\,M\,L^{-1}\,Mf,f)=\left\|L^{-1}Mf\right\|_M^2\le k_f^2\;\|f\|_M^2\,. \tag{17}$$

Используя (17) и неравенства, которые следуют из определения функции θ_ε:

$$(\nabla\theta_\varepsilon(y)-\nabla\theta_\varepsilon(z),y-z)\ge0,$$

$$(\nabla\theta_\varepsilon(y) - \nabla\theta_\varepsilon(z), x) \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,(\nabla\theta_\varepsilon(y) - \nabla\theta_\varepsilon(z), y - z)^{1/2}\|x\|_M,$$

будем иметь, что

$$(P_{2\,\varepsilon}(u) - P_{2\,\varepsilon}(v), u - v) = \big(\nabla\theta(L^{-1}Mu) - \nabla\theta(L^{-1}Mv), L^{-1}M(u - v)\big) \ge 0,$$

$$(P_{2\,\varepsilon}(u) - P_{2\,\varepsilon}(v), w) \le \frac{k_f}{\sqrt{\varepsilon}}\,(P_{2\,\varepsilon}(u) - P_{2\,\varepsilon}(v), u - v)^{1/2}\,\|w\|_M\,,$$

Объединяя оценки для P_1 и $P_{2\,\varepsilon}$, получим:

$$\begin{aligned}(P(u) - P(v), u - v) &\ge r\,\|u - v\|_M^2\,,\\ (P(u) - P(v), w) &\le \beta^{1/2}\,(P(u) - P(v), u - v)^{1/2}\big\|w\big\|_M,\end{aligned} \tag{18}$$

где $\beta = k_f^2 + r + k_f^2/\varepsilon$.

Пусть теперь $z^k = u^k - u$. Умножим включение

$$\frac{1}{\tau}B(z^{k+1} - z^k) + P(u^k) - P(u) + \partial\varphi(u^{k+1}) - \partial\varphi(u) \ni 0$$

на $2\tau z^{k+1}$, тогда

$$\|z^{k+1}\|_B^2 - \|z^k\|_B^2 + \|z^{k+1} - z^k\|_B^2 + 2\tau(P(u^k) - P(u), z^{k+1}) \le 0.$$

В силу (18)

$$\begin{aligned}2\tau(P(u^k) - P(u), z^{k+1}) = 2\tau(P(u^k) - P(u), z^k) + 2\tau(P(u^k) - P(u), (u^{k+1} - u^k)) \ge\\ \ge (2\tau - \tau^2\beta)(P(u^k) - P(u), z^k) - \|z^{k+1} - z^k\|_B^2.\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, будем иметь

$$\|z^{k+1}\|_B^2 \le \big(1 - \tau r(2 - \tau\beta)\big)\|z^k\|_B^2,$$

откуда следуют все сформулированные утверждения относительно сходимости и скорости сходимости итерационного метода. □

Замечание 1. При отсутствии ограничений на состояние в задаче оптимального управления (3) ($\theta = 0$) оптимальный итерационный параметр и множитель сокращения погрешности равны

$$\tau_0 = \frac{r}{k_f^2 + r}, \quad \rho = \frac{k_f^2}{k_f^2 + r}.$$

2.2. Предобусловленный метод Узавы. Исключив векторы y и u в системе (12), получим уравнение для λ:

$$P(\lambda) \equiv L\,(M + \partial\theta)^{-1}(L\lambda + g) - M\,(r\,M + \partial\varphi)^{-1}(-M\lambda) = Mf. \tag{19}$$

Применим для решения (19) итерационный метод

$$L\,M^{-1}\,L\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} + P(\lambda^k) = Mf, \tag{20}$$

являющийся предобусловленным методом Узавы для отыскания седловой точки функции Лагранжа (11). При реализации этого метода выполняются следующие шаги.

1. Вычислить $\tilde{f} = L^{-1}Mf$.

2. Для известного вектора λ^k найти y^k и u^k, решив включения с диагональными максимально монотонными операторами

$$(M+\partial\theta)y^k \ni L\lambda^k + g \ \text{ и } \ (r\,M+\partial\varphi)u^k \ni -M\lambda^k.$$

3. Вычислить $p^k = L^{-1}Mu^k$.

4. Решить уравнение

$$L\,\frac{\lambda^{k+1}-\lambda^k}{\tau} = M(-y^k+p^k+\widetilde{f}).$$

Для исследования сходимости метода (20) применим следующий результат, который является прямым обобщением теоремы 5.9 из [8, гл. 5].

Утверждение 1. *Пусть* $P = C^T \circ A \circ C$, *где матрица* $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *а оператор* $A:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *удовлетворяет условию обратной сильной монотонности*

$$(A(u)-A(v), u-v) \ge p_0\|A(u)-A(v)\|^2, \quad p_0>0. \tag{21}$$

Предположим, что уравнение $P(\lambda)=0$ *имеет решение, которое будем искать с помощью итерационного метода*

$$\frac{1}{\tau}B(\lambda^{k+1}-\lambda^k) + P(\lambda^k) = 0.$$

Тогда при условии

$$B = B^T > \frac{\tau}{2p_0}C^TC \tag{22}$$

этот метод сходится для любого начального приближения.

Теорема 2. *Итерационный метод* (20) *сходится при условии*

$$0<\tau<\frac{2r}{k_f^2+r}, \tag{23}$$

где k_f *– постоянная из неравенства* (8).

Доказательство. Запишем левую часть уравнения (19) в виде

$$P(\lambda) = L\,M^{-1/2}A_1(M^{-1/2}(L\lambda+g)) - r^{-1/2}M^{1/2}A_2(-r^{-1/2}M^{1/2}\lambda),$$

$$A_1 = M^{1/2}\circ(M+\partial\theta)^{-1}\circ M^{1/2}, \quad A_2 = (r\,M)^{1/2}\circ(r\,M+\partial\psi)^{-1}\circ(r\,M)^{1/2}.$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} M^{-1/2}\,L \\ -(r\,M)^{-1/2}M \end{pmatrix}, \quad P = C^T\circ A\circ C.$$

Используя обозначения $u_i = (M+\partial\theta)^{-1}(M^{1/2}y_i)$, получим

$$\begin{aligned}(A_1(y_1)-A_1(y_2), y_1-y_2) = ((M+\partial\theta)^{-1}(M^{1/2}y_1)-\\ -(M+\partial\theta)^{-1}(M^{1/2}y_2), M^{1/2}y_1 - M^{1/2}y_2) \ge\\ \ge (M(u_1-u_2), u_1-u_2) = \|A_1(y_1)-A_1(y_2)\|^2.\end{aligned} \tag{24}$$

Аналогично
$$(A_2(f_1) - A_2(f_2), f_1 - f_2) \geq \|A_2(f_1) - A_2(f_2)\|^2. \tag{25}$$
В силу (24) и (25) выполнены условия утверждения 1, а неравенство (22) сходимости итерационного метода (20) приобретает вид
$$L\, M^{-1}\, L > \frac{\tau}{2}\big(L\, M^{-1}\, L + r^{-1}\, M\big). \tag{26}$$
Из неравенства (17) следует
$$(My, y) \leq k_f^2 (L\, M^{-1}\, Ly, y),$$
поэтому (26) выполнено, если
$$1 > \frac{\tau}{2}(1 + k_f^2 r^{-1}),$$
что эквивалентно условию (23). □

Замечание 2. Можно доказать, что если функция θ заменена на регуляризованную функцию θ_ε из (13), то метод (20) сходится при условии (23), а при
$$\tau_0 = \frac{r}{k_f^2 + r}$$
справедлива оценка скорости сходимости
$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_B \leq \rho^{1/2} \|\lambda^k - \lambda\|_B, \quad \rho = 1 - \frac{\varepsilon r_1}{(1+\varepsilon)(k_f^2 + r_1)}, \quad B = L\, M^{-1}\, L.$$
В случае отсутствия ограничений на состояние ($\theta = 0$) оптимальный параметр τ_0 и множитель ρ в оценке скорости сходимости равны
$$\tau_0 = \frac{r}{k_f^2 + r}, \quad \rho = \frac{k_f^2}{k_f^2 + r}.$$

Как следует из теоремы 1 и замечаний 1, 2, для задач без ограничений на функцию состояния ($\theta = 0$) или с регуляризованной функцией θ теоретические оценки скорости сходимости методов (20) и (15) одинаковы (асимптотически по параметру ε в случае регуляризованной функции θ_ε). Трудоемкость реализации одного шага для обоих методов одинакова: на каждой итерации требуется дважды обратить матрицу L и решить включение с диагональным оператором. При этом метод (20) можно применять при наличии ограничений на состояние, не прибегая к регуляризации функции ограничений θ, а при использовании метода регуляризации ограничения на итерационный параметр τ и его теоретически оптимальное значение τ_0 не зависят от параметра регуляризации ε.

3. Результаты численных экспериментов

Будем решать следующие одномерную и двумерную задачи. Пусть функционал цели задан равенством
$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega y^2(x)\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x)\, dx$$

с $\Omega=(0,1)$ или $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ соответственно. Задача состояния и ограничения имеют вид

$$\begin{aligned}&-y''=f+u,\quad x\in(0,1),\quad y(1)=y(0)=0,\\&y(x)\ge 0,\quad x\in(0,1),\quad |u(x)|\le 1,\quad x\in(0,1)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&-\Delta y=f+u,\quad x\in\Omega,\quad y(x)=0,\quad x\in\partial\Omega,\\&y(x)\ge 0,\quad x\in\Omega,\quad |u(x)|\le 1,\quad x\in\Omega.\end{aligned}$$

Аппроксимируем краевые задачи конечно-разностными схемами на равномерных сетках с шагом h. При аппроксимации целевых функционалов используем простейшие квадратурные формулы. В результате получим конечномерные задачи:

найти минимум функции

$$J(y,u)=\frac{1}{2}\,\|y\|_{l_2}^2+\frac{1}{2}\,\|u\|_{l_2}^2$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&\frac{-y_{i-1}+2y_i-y_{i+1}}{h^2}=f_i+u_i,\quad i=1,2,\dots,n,\quad y_0=y_{n+1}=0,\\&y_i\ge 0,\quad i=1,2,\dots,n,\quad |u_i|\le 1,\quad i=1,2,\dots,n,\end{aligned}$$

в одномерном случае и

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h^2}(-y_{i-1j}-y_{i+1j}+4y_{ij}-y_{ij+1}-y_{ij-1})=f_{ij}+u_{ij},\quad i,j=1,2,\dots,n,\\&y_{0j}=y_{j0}=y_{jn+1}=y_{n+1j}=0,\\&y_{ij}\ge 0,\quad i,j=1,2,\dots,n,\quad |u_{ij}|\le 1,\quad i,j=1,2,\dots,n,\end{aligned}$$

в двумерном случае. Выше использованы обозначения $\|v\|_{L_2}^2=h\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2$ для одномерной задачи и $\|v\|_{L_2}^2=h^2\sum\limits_{i,j=1}^{n}v_{ij}^2$ для двумерной. Пусть $\theta(y)$ и $\varphi(u)$ – индикаторные функции множеств ограничений на y и u, L – симметричная и положительно определенная матрица соответствующей системы сеточных уравнений и E – единичная матрица. Тогда конечномерные задачи оптимального управления примут вид

$$\min_{Ly=f+u}\left\{J(y,u)=\frac{1}{2}\,\|y\|_{L_2}^2+\theta(y)+\frac{1}{2}\,\|u\|_{L_2}^2+\varphi(u)\right\},$$

и соответствующие им седловые задачи есть

$$\begin{pmatrix}E&0&L\\0&E&-E\\L&-E&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\u\\\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\partial\theta(y)\\\partial\varphi(u)\\0\end{pmatrix}\ni\begin{pmatrix}0\\0\\f\end{pmatrix}.$$

Для решения этих задач будем использовать:

• Градиентный метод с заменой функции θ регуляризованной функцией $\theta_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i^-)^2$. Задача для u имеет вид

$$L^{-1}\big(E+\nabla\theta_\varepsilon\big)\big(L^{-1}(f+u)\big)+u+\partial\varphi(u)\ni 0,$$

Табл. 1

Одномерная задача, $h = 10^{-3}$, $y = 3(\sin(3\pi x))^+$, $F(y,u) = 3.0083$

	Метод Узавы, $\tau = 1$, $\lambda^0 = 0$		Метод регуляризации, $\tau = 0.002$, $\epsilon = 0.001$, $u^0 = 0$		Метод Узавы, $\tau = 1$, $\lambda^0 = \frac{2}{\pi^2}\sin(\pi x)$		Метод регуляризации, $\tau = 0.002$, $\epsilon = 0.001$, $u^0 = \frac{2}{\pi^2}\sin(\pi x)$	
N	F	Nrm	F	Nrm	F	Nrm	F	Nrm
1	0	1.7336	0	0.068541	101.33	10.2089	3.0303	0.13922
2	3.0237	0.025182	3.0123	0.068362	1.9612	0.40409	3.0302	0.13889
3	3.007	0.02341	3.0123	0.068188	3.0073	0.060868	3.0301	0.13857
4	3.0071	0.02326	3.0122	0.068017	3.0082	0.034343	3.03	0.13824
5	3.0071	0.023109	3.0122	0.06785	3.0088	0.026426	3.0298	0.13792
6	3.0071	0.02296	3.0122	0.067687	3.0089	0.023276	3.0297	0.13759
7	3.0071	0.022812	3.0121	0.067527	3.0089	0.021747	3.0296	0.13727
8	3.0071	0.022665	3.0121	0.067371	3.009	0.020888	3.0295	0.13695
9	3.0071	0.022518	3.0121	0.067218	3.009	0.020117	3.0294	0.13663
10	3.0071	0.022373	3.0121	0.067068	3.0089	0.019906	3.0293	0.1363

Табл. 2

Результаты численных экспериментов решения исходной задачи методом Узавы в двумерном случае при различных значениях n – количестве узлов сетки в одном направлении, $y = 3\sin(6\pi x_1 x_2)^+$

	$n = 10^2$, $F(y,u) = 2.7783$		$n = 3 \cdot 10^2$, $F(y,u) = 2.7935$		$n = 5 \cdot 10^2$, $F(y,u) = 2.7965$	
N	F	Nrm	F	Nrm	F	Nrm
1	0	1.6668	0	1.6714	0	1.6723
2	2.7828	0.0092906	2.798	0.00931	2.801	0.0093082
3	2.7782	0.0089796	2.7934	0.0089996	2.7964	0.0089978
4	2.7782	0.0089681	2.7934	0.0089881	2.7965	0.0089863
5	2.7782	0.0089566	2.7934	0.0089766	2.7965	0.0089748
6	2.7782	0.0089452	2.7934	0.0089651	2.7965	0.0089633
7	2.7782	0.0089337	2.7934	0.0089536	2.7965	0.0089518
8	2.7782	0.0089223	2.7934	0.0089421	2.7965	0.0089403
9	2.7782	0.0089109	2.7934	0.0089307	2.7965	0.0089289
10	2.7782	0.0088995	2.7934	0.0089192	2.7965	0.0089174

итерационный метод задается соотношением

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + L^{-1}\big(E + \nabla\theta_\varepsilon\big)\big(L^{-1}(f + u^k)\big) + u^k + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni 0.$$

- Метод Узавы с предобусловливанем. Задача для λ имеет вид

$$-L(E + \partial\theta)^{-1}(-L\lambda) + (E + \partial\varphi)^{-1}(\lambda) = f,$$

итерационный метод задается соотношением

$$L^2\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} - L(E + \partial\theta)^{-1}(-L\lambda^k) + (E + \partial\varphi)^{-1}(\lambda^k) = f.$$

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 1, 2, где использованы следующие обозначения: N – номер итерации; F – значение функционала цели на соответствующей итерации; $F(y,u)$ – значение функционала цели на точном решении; $\mathrm{Nrm} = (||y^k - y||^2_{L_2} + ||u^k - u||^2_{L_2})^{1/2}$, где y, u – компоненты точного решения седловой задачи.

Постановка сеточной задачи с заданным точным решением осуществлялась следующим образом. Пусть y – произвольный вектор из $\mathrm{dom}\,\theta$, который будет точным решением сеточной задачи состояния, и $\gamma_y \in \partial\theta(y)$ – какой-либо вектор из множества $\partial\theta(y)$. Находим $\lambda = -L^{-1}(y + \gamma_y)$, затем векторы u и $\gamma_p \in \partial\varphi(u)$, решая включение $u + \partial\varphi(u) \ni \lambda$. Наконец, полагаем $f = Ly - u$.

Численные эксперименты показывают эффективность метода Узавы для решения сеточных аппроксимаций задач оптимального управления в правой части линейного эллиптического уравнения или в правой части граничных условий. Из приведенных выше результатов мы видим, что скорость сходимости метода не зависит количества узлов сетки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00629).

Summary

A.V. Lapin, M.G. Khasanov. The Solution of a State Constrained Optimal Control Problem by the Right-Hand Side of an Elliptic Equation.

The article deals with grid approximation of a state and control constrained optimal control problem by a finite element or finite difference method. The control function is the right hand side of a linear elliptic equation. The convergence of the iterative solution methods for the discrete problem is investigated both theoretically and numerically. The comparison of the numerical results for the different iterative methods is done.

Key words: optimal control, constrained saddle point problems, finite element method, iterative method.

Литература

1. *Gill Ph., Murray W., Wright M.* Practical optimization. – London: Acad. Press, 1981. – 401 p.

2. *Bertsekas D.P.* Constrained optimization and Lagrange multiplier methods. – N. Y.: Acad. Press, 1982. – 395 p.

3. *Biegler L.T., Ghattas O., Heinkenschloss M., van Bloemen Waanders B.* (eds.) Large-scale PDE-constrained optimization. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. V. 30. – Berlin: Springer, 2003. – 349 p.

4. *Bergounioux M.* Augmented Lagrangian method for distributed optimal control problems with state constraints // Optimization Theory Appl. – 1993. – V. 78, No 3. – P. 493–521.

5. *Bergounioux M., Haddou V., Hintermuller M., Kunisch K.* A comparison of a Moreau-Yosida-based active set strategy and interior point methods for constrained optimal control problems // SIAM J. Optim. – 2000. – V. 11, No 2. – P. 495–521.

6. *Bergounioux M., Kunisch K.* Primal-dual strategy for state-constrained optimal control problems // Comput. Optim. Appl. – 2002. – V. 22, No 2. – P. 193–224.

7. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М: Мир, 1979. – 400 с.

8. *Лапин А.В.* Итерационные методы решения сеточных вараиционных неравенств. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 132 с.

Поступила в редакцию
16.06.10

Лапин Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *avlapine@mail.ru*

Хасанов Марат Гумярович – аспирант НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *maratkhasanov86@gmail.com*